2018 / 5 / 21 م

المحاضرة الثالثة عشر   م 13

مبرهنة:

اذا كان الفضاء التبولوجي X معدوداً ثانياً فإنه يمتلك مجموعة كثيفة قابلة للعد أي انه منفصل.

البرهان:

بما ان X معدود ثانياً فبالتالي بالتعريف يمتلك قاعدة قابلة للعد ولتكن أسرة المجموعات المفتوحة $\{U_n\}_{n \in N}$

نختار من كل مجموعة U_n نقطة x_n فنحصل على المجموعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ وهي مجموعة قابلة للعد، هذه المجموعة كثيفة لانها تتقاطع مع جميع المجموعات المفتوحة غير الخالية وهو المطلوب.

موضوعات الفصل:

هناك عدة موضوعات للفصل سندرس الثلاثة الاولى منها

1- موضوعة الفصل الصفرية T_0

هي انه من اجل أي نقطتين مختلفتين من فضاء تبولوجي، يوجد لاحداهما جوار لا يحوي النقطة الاخرى.

ان الفضاء الذي يحقق هذه الموضوعة نسميه "T_0 - فضاء" أو "فضاء كلموغوروف"

مثال:

ليكن لدينا الفضاء $X = \{a, b\}$, $T = \{\emptyset, X\}$

في هذا الفضاء لـ a جوار وحيد هو X الفضاء غير متقطع

وكذلك لـ b " " " X ليس T_0 - فضاء.

وبالتالي هذا الفضاء ليس T_0 - فضاء

ملاحظة:

بما أنه توجد فضاءات ليست T_0 فضاء، فالتعريف مفيد، ولكن نلاحظ أن الفضاءات التي ليست T_0 ليس لها أهمية من الناحية العملية.

مثال:

ليكن لدينا الفضاء $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\phi, \{a\}, X\}$

هنا الفضاء T_0 فضاء لأنه

يكفي أن نوجد جوار لأحد النقاط لا تحوي النقطة الأخرى

نلاحظ أن a تملك جوار $\{a\}$ لا تحوي النقطة b

للفضاء T_0 مكافئات سنذكر إحداها من خلال المبرهنة

مبرهنة:

ليكن X فضاء توبولوجياً، إن القضيتين التاليتين متكافئتان:

1. X هو T_0 فضاء

2. $\overline{\{y\}} \neq \overline{\{x\}}$ من أجل أي نقطتين x, y من X

/ /

البرهان:

1 ⇐ 2 نفرض $x \neq y$ من X يوجد جوار لـ x فرضاً
جوار لا يحوي النقطة y هذا يعني ان النقطة x لا تنتمي الى
لصاقة y

ولكن x تنتمي الى لصاقة x $\Leftarrow$ $x \in \overline{\{x\}}$

لصاقة $x \neq$ لصاقة y $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$

2 ⇐ 1 نفرض $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ ، لنفرض جدلاً ان الفضاء X
ليس T_0 . هذا يعني ان أي جوار لـ x يحوي y وأي جوار لـ y
يحوي x

وهذا يعني ان لصاقة x محتواة في لصاقة y $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$

و لصاقة y " " " x $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{y\}}$

$\Leftarrow$ $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ وهذا يناقض الفرض الاصلي.

* وبالعودة للمثالين السابقين :

هنا $\overline{\{a\}} = X$, $\overline{\{b\}} = X$

وهذا الفضاء ليس T_0 بينما لدينا $X = \{a,b\}$

و $T = \{\phi, \{a\}, X\}$

هنا نجد انه $\overline{\{a\}} = X$ و $\overline{\{b\}} = b$ لان كل مغلقة

لصاقة الجزئية هي المغلق X لا تساوي لصاقة الجزئية هي العنصر b

(الجوار = مجموعة مفتوحة)

/ /

2 ـ موضوعة الفصل الأولى T_1

وهي من أجل أي نقطتين مختلفتين من فضاء طبولوجي ⇐ يوجد لكل منها جوار لا يحوي النقطة الأخرى.

إن الفضاء الذي يحقق هذه الموضوعة نطلق عليه T_1 فضاء

⇐ ينتج من هذا التعريف أن موضوعة الفصل الصفرية ينتج من موضوعة الفصل الأولى.

أي أن كل T_1 فضاء هو T_0 والعكس غير صحيح.

مثال 1.

لو أخذنا $\tau = \{\phi, \{a\}, X\}$ هذا الفضاء هو T_0 فضاء ولكنه ليس T_1 فضاء.

لأن أي جوار لـ b (الذي هو X فقط) يحوي a

مثال -2-

لنأخذ الفضاء المتقطع (X, τ) طبولوجيا القوية.

وهذا الفضاء هو T_1 فضاء

لأنه من أجل أي نقطتين مختلفتين (x, y) ⇐ يوجد لـ x جوار هو $\{x\}$ لا يحوي y (لأن كل المجموعات مفتوحة)

ويوجد جوار لـ y هو $\{y\}$ لا يحوي x

مثال 3.

مثلاً لو أخذنا R مجموعة الأعداد الحقيقية المألوفة.

المجموعات التي تحوي 1 $\tau = \{u \subseteq R : 1 \in u\} \cup \{\phi\}$

والمجموعات المفتوحة هي التي تحوي الواحد

x y

جوار لـ x هو $\{x, 1\}$ جوار لـ y $\{y, 1\}$

/ /

ولو كان لدينا أن x له جوار ا هو $\{1\}$

$y \neq 1$ له y هو $\{1, y\}$ ولا

⇐ أي جوار لـ y يحوي الواحد (النقطة الأخرى)

⇐ الفضاء ليس T_1 فضاء، وهو T_0 فضاء.

* للفضاء T_1 مكافئات عدة، سوف نأخذ أهمها:

مبرهنة:

ليكن X فضاء طبولوجياً، فإن القضيتين الآتيتين متكافئتان:

⇐ 1- X هو T_1 فضاء

2- المجموعة وحيدة العنصر x $\{x\}$ مغلقة مهما كان $x \in X$

البرهان:

1 ⇐ 2 نعتبر نقطة x بالفضاء ولنثبت أن المجموعة $\{x\}$ مغلقة.

والاشتمال $X \setminus \{x\}$ مجموعة مفتوحة

⇐ نأخذ نقطة كيفية y : $y \in X \setminus \{x\}$

ومن التعريف: (يوجد جوار لا يحوي y)

يوجد جوار مفتوح U_y

$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} \{y\} \subseteq U_y \subseteq X \setminus \{x\}$

وهذا الكلام صحيح من أجل نقطة y

⇐ اجتماع المجموعات مفتوحة ⇐ هي مجموعة مفتوحة ⇐

والمتممة $\{X\}$ مغلقة

2 ⇐ 1

سهلة: إن المجموعة وحيدة العنصر مغلقة ولنثبت أن الفضاء هو T_1 فضاء

$x \neq y$ بما أن $\{x\}$ مغلقة ⇐ متممتها مفتوحة

$X \setminus \{x\}$ وتحوي y ⇐ هي جوار لـ y لا تحوي x

وبالمثل $\{y\}$ مغلقة ⇐ متممتها $X \setminus \{y\}$ مفتوحة

وتحوي x ⇐ هي جوار x لا تحوي y

A جوار يه لاتيقاطع مع A ←

← فإنه الفضاء هو T_1 - فضاء

نتيجة مباشرة :

أي مجموعة منتهية في T_1 فضاء هي مجموعة مغلقة

تمرين :

ليكن X هو T_1 فضاء ، A منتهية ، x عنصر لاينتمي إلى A $(x \notin A)$

عندها يوجد جوار للعنصر x لا يتقاطع مع A

الحل :

لنأخذ المجموعة المنتهية $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

و لكن $x \notin A$

← يوجد جوار V_1 لـ x لا تحوي a_1

" " V_2 لـ x " " a_2 ، هكذا ...

⋮

" " V_n لـ x " " a_n

← الآن لنأخذ التقاطع

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$$

هو جوار لـ x ، لا يتقاطع مع A

مبرهنة :

ليكن (X, T_1) فضاء ، $A \subseteq X$ ، $x \in X$

← تكون النقطة x نقطة تراكم للمجموعة A إذا وفقط إذا ⟸⟹

كان أي جوار لـ x يتقاطع مع A بعدد غير منته من العناصر

البرهان :

إذا كان أي جوار للنقطة x يحوي مالا نهاية من النقاط (عناصر A)

معنى ذلك ← أن النقطة x هي نقطة تراكم .

والآن العكس ...

* تكون المجموعة مغلقة إذا كون صحيح مستقا ∑ *

/ /

والآن بالعكس لنفرض أن x نقطة تراكم

ولنفرض جدلاً أنه يوجد جوار للنقطة x مثل v بحيث أن $v \cap A$

$$v \cap A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

عندئذٍ حسب الفرض السابق يوجد جوار W لـ x بحيث أن

$$\{x\} \supseteq (v \cap A) \cap W = A \cap (v \cap W)$$

الآن تكون نستقاطع مع v أو يكون التقاطع هو عبارة عن عنصر واحد

$$W \cap (v \cap A) = \{x\} \quad \text{أو} \quad = \phi$$

أي $v \cap W \cap A \setminus \{x\} = \phi$ وبالتالي ......

⇐ x ليست نقطة تراكم وهذا تناقض ......

⇐ الفرض الجدلي خاطئ

وأي جوار لـ x يحوي عدد لا نهائي من عناصر المجموعة X

ملاحظة:

في الفضاء T تكون النقطة اللاصقة بالمجموعة إما نقطة تراكم أو نقطة منعزلة.

الملف الحادي عشر 11.